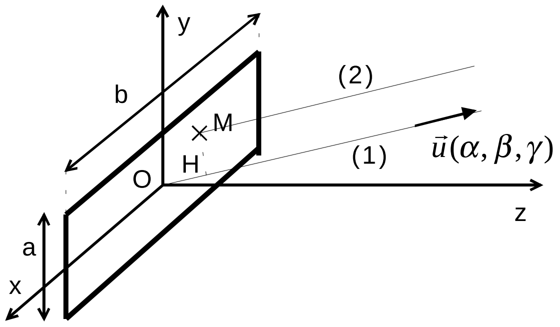
-EXERCICE 30.3-

• ENONCE :

« Diffraction à l'infini par une pupille rectangulaire »



On s'intéresse à la diffraction d'une O.P.P.M lumineuse à l'infini (diffraction de Fraunhofer), c'est-à-dire dans une direction de vecteur unitaire $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$
L'onde incidente se propage selon l'axe Oz.
La pupille diffractante (de transmittance uniforme) est rectangulaire (petit côté a, grand côté b), contenue dans le plan xOy.

1) Déterminer l'éclairement diffracté dans la direction $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$; commenter les principaux résultats.
2) Etudier le cas $a \ll b$ (avec $b \gg \lambda$) : dans un premier temps, on se servira des résultats de la question 1), puis on fera un calcul direct de l'éclairement diffracté dans une direction faisant l'angle θ avec l'axe Oz.
3) Préciser les conditions expérimentales permettant d'obtenir une onde plane en incidence normale sur l'ouverture diffractante et de réaliser une observation à « l'infini ».
4) Comment seraient modifiés les résultats pour une onde plane sous incidence oblique ?

• CORRIGE :

« Diffraction à l'infini par une pupille rectangulaire »

1) En appliquant le principe d'Huygens-Fresnel, il vient :

$$\underline{s}(\vec{u}) = A\underline{s}_0(\vec{u}) \times \iint_{a,b} \exp(-i\varphi_{2/1})dS = A\underline{s}_0(\vec{u}) \iint_{a,b} \exp(i\vec{k}\cdot\overrightarrow{OM})dS \qquad \text{avec : } \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}$$

Rq1 : $\underline{s}_0(\vec{u})$ est l'amplitude complexe de l'onde diffractée par le centre O de la pupille, dans la direction $\vec{u}$.

Rq2 : $\varphi_{2/1}$ est le retard de phase (algébrique) du rayon (2) par rapport au rayon (1), dans la direction d'observation $\vec{u}$.

Rq3 : A est une constante de proportionnalité en m^{-2}.

• Avec un vecteur unitaire $\vec{u}$ de composantes (α, β, γ), et en remarquant que les variables x et y sont indépendantes, on obtient :

$$\vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} = \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y) \Rightarrow \underline{s}(\vec{u}) = A\underline{s}_0(\vec{u}) \times \int_{-a/2}^{a/2} \exp[i(\frac{2\pi\alpha x}{\lambda})]dx \times \int_{-b/2}^{b/2} \exp[i(\frac{2\pi\beta y}{\lambda})]dy \text{ ; d'où :}$$

$$\underline{s}(\vec{u}) = A\underline{s}_0(\vec{u}) \times \frac{\lambda}{\pi\alpha}\sin(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}) \times \frac{\lambda}{\pi\beta}\sin(\frac{\pi\beta b}{\lambda}) = A\underline{s}_0(\vec{u})ab \times \sin_c(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}) \times \sin_c(\frac{\pi\beta b}{\lambda}) \text{ ; enfin :}$$

$$\boxed{\mathrm{E}(\vec{u}) = \langle \underline{s} \times \underline{s}^* \rangle_t = A^2 |\underline{s}_0|^2 a^2 b^2 \times \sin_c^2(v) \times \sin_c^2(w) = \mathrm{E}_{\max} \times \sin_c^2(v) \times \sin_c^2(w)} \qquad (1)$$

avec : $\boxed{\mathrm{E}_{\max} = (A|\underline{s}_0|ab)^2}$ $\boxed{v = \frac{\pi\alpha a}{\lambda}}$ $\boxed{w = \frac{\pi\beta b}{\lambda}}$

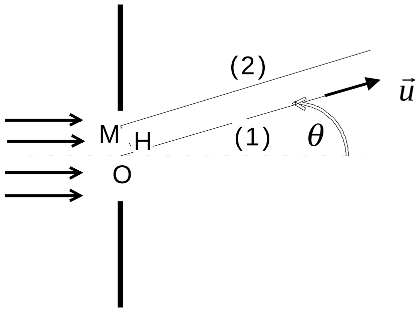
• On se reportera au cours pour l'allure de la fonction $\sin_c^2(x)$; rappelons que les dimensions angulaires de la tache centrale (beaucoup plus lumineuse que les autres) sont $\frac{2\lambda}{a}$ selon Ox, et $\frac{2\lambda}{b}$ selon Oy.

En perspective de la question 2), on remarquera que, selon la direction Oy, les milieux des taches (en excluant la tache centrale) sont distants de $\Delta w = \pi \Rightarrow \Delta\beta = \frac{\lambda}{b}$ (en distance angulaire).

2) Dans ce cas : $\Delta\beta = \frac{\lambda}{b} \to 0 \Rightarrow$ les taches de diffraction selon l'axe Oy tendent vers une seule, confondue avec l'image (au sens de l'optique géométrique) de la pupille selon cette même direction (longueur b) ; on retrouve l'idée que lorsque les « obstacles » ont des dimensions grandes par rapport à la longueur d'onde, le modèle de l'optique ondulatoire n'est pas nécessaire, l'approximation de l'optique géométrique étant suffisante.

En revanche, le phénomène de **diffraction** est **bien marqué** selon la **plus petite dimension** de la pupille, l'axe Ox dans le cas présent.

• La direction d'observation sera donc contenue dans le plan xOz, et la composante α du vecteur unitaire $\vec{u}$ vaudra $\sin\theta$, comme on peut le vérifier sur la figure ci-dessous :



La simplification de la relation (1) permet d'écrire:

$$\boxed{\mathrm{E}(\theta) = \mathrm{E}_0 \times \sin_c^2(v)}$$ avec: $$\boxed{v = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}}$$

(2)

• Le calcul direct se pose ainsi :

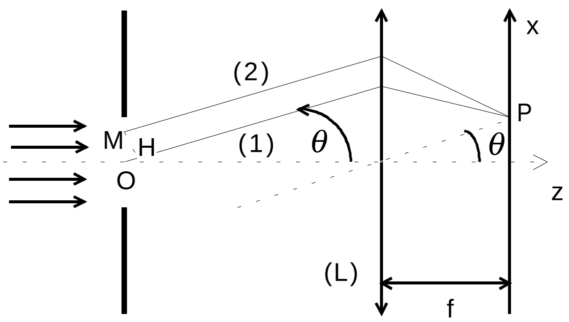
$$\underline{s}(\theta) = A\underline{s}_0(\theta) \times \int_{-a/2}^{a/2} \exp(-i\varphi_{2/1})dx = A\underline{s}_0(\theta) \times \int_{-a/2}^{a/2} \exp[i(\frac{2\pi a \sin\theta}{\lambda})]dx$$ (où A est cette fois en m^{-1})

(en effet, d'après le théorème de Malus, toute différence de marche acquise au niveau du plan passant par les points M et H, H étant la projection orthogonale de M sur le rayon (1), sera conservée par la suite, jusqu'à « l'infini »).

La suite du calcul est triviale et conduit à la relation (2).

3) **Incidence normale :** une source ponctuelle (et monochromatique, dans le cas présent) est placée au foyer d'une lentille convergente d'axe Oz.

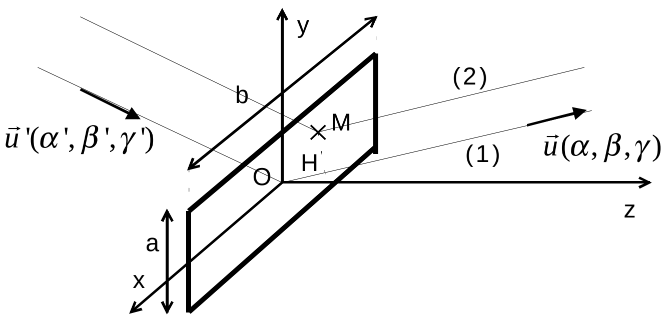
Observation à l'infini :



L'observation se fait dans le plan focal d'une lentille convergente (L), de focale f.
En un point P donné de l'écran (E) vont converger les rayons **parallèles** (1) et (2).
La différence de marche acquise avant le plan passant par M et H est conservée par la suite (théorème de Malus).
On a alors:

$$\boxed{\sin\theta \simeq \tan\theta = \frac{x(P)}{f}}$$

4) **Pupille rectangulaire :**



On considère toujours une onde plane, avec $\vec{u}\,' \neq \vec{u}$,
La source est toujours ponctuelle et placée au foyer d'une lentille convergente, dont l'axe est parallèle à $\vec{u}\,'$

Cette fois, le déphasage s'écrit : $$\boxed{\varphi_{2/1} = \vec{k}\,'\cdot\overrightarrow{OM} - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} = \frac{2\pi}{\lambda}[(\alpha'-\alpha)x + (\beta'-\beta)y + (\gamma'-\gamma)z]}$$

L'éclairement est conforme à l'expression (1) avec : $$\boxed{v = \frac{\pi(\alpha-\alpha')a}{\lambda}}$$ et : $$\boxed{w = \frac{\pi(\beta-\beta')b}{\lambda}}$$

• **Pupille très fine :** en notant i l'angle entre le faisceau incident et l'axe Oz, on a :

$$\boxed{\varphi_{2/1} = \frac{2\pi a}{\lambda}(\sin i - \sin\theta)}$$ (cette fois, les 2 faisceaux sont dans le même plan xOz)